Unidad II

Integral indefinida y métodos de integración.

2.1 Definición de integral indefinida.

Integrar es el proceso recíproco del de **derivar**, es decir, dada una función **f(x)**, busca aquellas funciones **F(x)** que al ser derivadas conducen a **f(x)**.

Se dice, entonces, que **F(x) es una primitiva o antiderivada de f(x)**; dicho de otro modo las **primitivas de f(x)** son las **funciones derivables F(x)** tales que:

F'(x) = f(x).

Si una función f(x) tiene primitiva, tiene **infinitas primitivas**, diferenciándose todas ellas en una**constante**.

[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)

Integral indefinida

Integral indefinida es el conjunto de las **infinitas primitivas** que puede tener una función.

Se representa por ∫ **f(x) dx**.

Se lee : **integral de x diferencial de x**.

∫ es el signo de integración.

f(x) es el **integrando** o función a integrar.

dx es **diferencial de x**, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

C es la **constante de integración** y puede tomar cualquier valor numérico real.

Si F(x) es una **primitiva** de f(x) se tiene que:

∫ **f(x) dx = F(x) + C**

Para comprobar que la **primitiva** de una función es correcta basta con **derivar**.

2.2 Propiedades de integrales indefinidas.

1. La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de esas funciones.

$\int[f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

2. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

Linealidad de la integral indefinida

La primitiva es lineal, es decir:

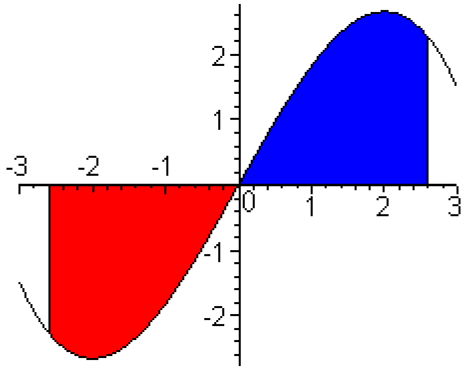
1. Si *f* es una función que admite una primitiva *F* sobre un intervalo *I*, entonces para todo real *k*, una primitiva de *kf* sobre el intervalo *I* es *kF*.
2. Si *F* y *G* son primitivas respectivas de dos funciones *f* y *g*, entonces una primitiva de *f* + *g* es *F* +*G*.

La linealidad se puede expresar como sigue:

$$\int (k \cdot f(x) + l \cdot g(x)) = k \cdot \int f(x) + l \cdot \int g(x)$$

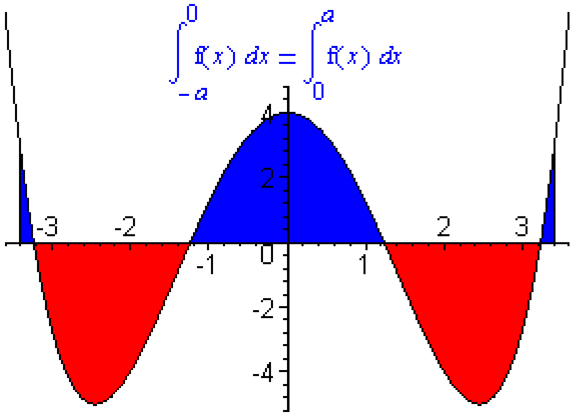
La primitiva de una función impar es siempre par

En efecto, como se ve en la figura siguiente, las áreas antes y después de cero son opuestas, lo que implica que la integral entre -a y a es nula, lo que se escribe así: F(a) - F(-a) = 0, F siendo una primitiva de f, impar. Por lo tanto siempre tenemos F(-a) = F(a): F es par.



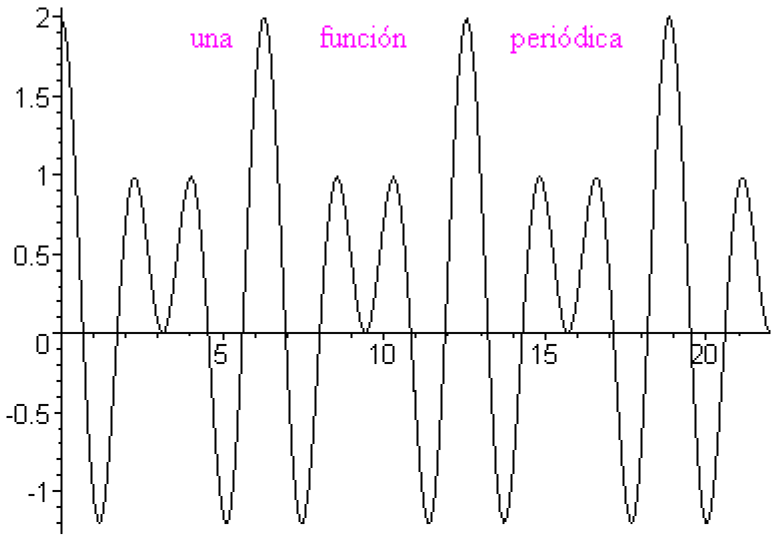
<u>La primitiva F de una función f par es impar con tal de imponerse F(0) = 0</u>

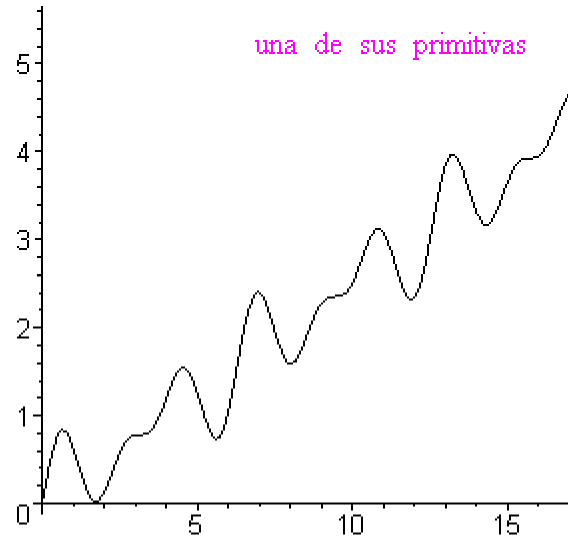
En efecto, según la figura, la áreas antes y después de cero son iguales, lo que se escribe con la siguiente igualdad de integrales:



<u>Es decir F(0) - F(- a) = F(a) - F(0). Si F(0) = 0, F(- a) = - F(a): F es impar.</u>

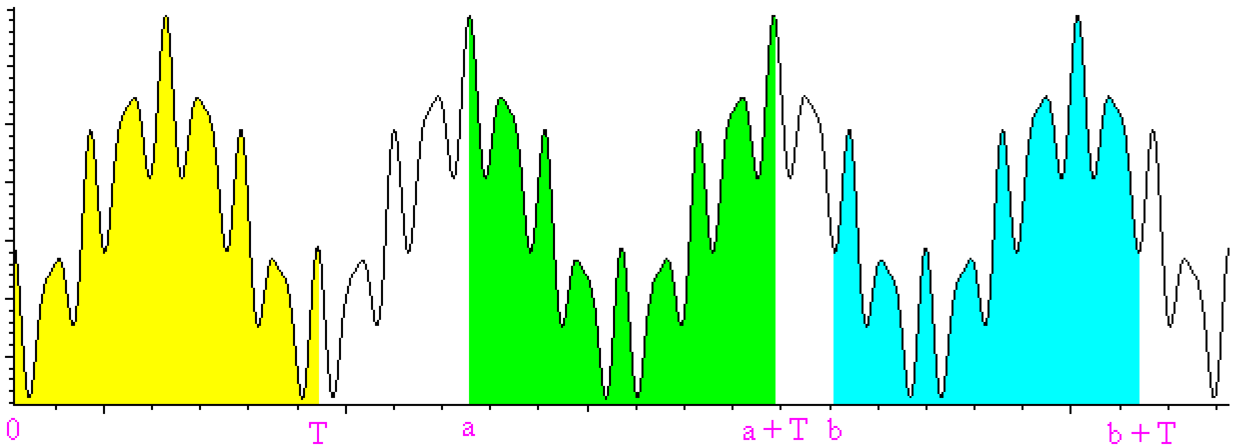
La primitiva de una función periódica es la suma de una función lineal y de una función periódica





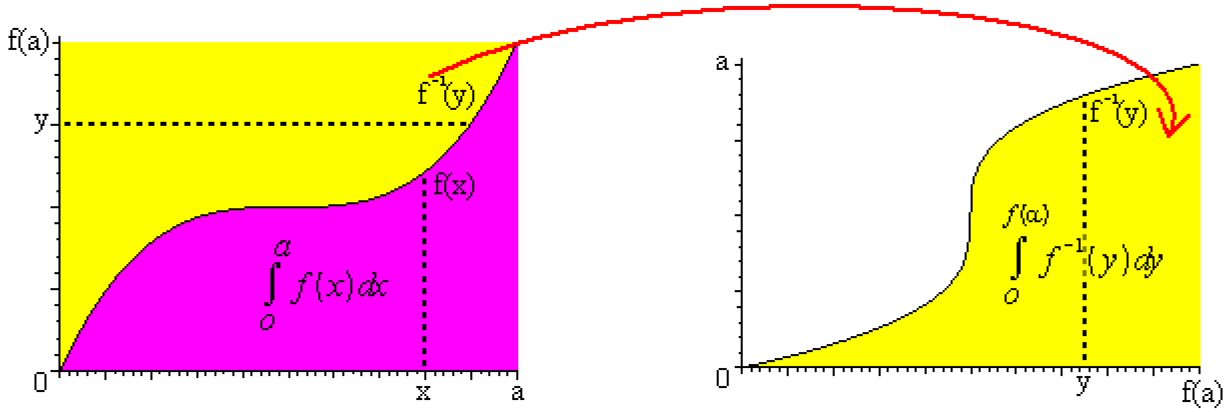
Para probarlo, hay que constatar que el área bajo una curva de una función periódica, entre las abcisas x y x + T (T es el período) es constante es decir no depende de x. La figura siguiente muestra tres áreas iguales. Se puede mostrar utilizando la periodicidad y la relación de Chasles, o sencillamente ¡con unas tijeras! (cortando y superponiendo las áreas de color).

En término de primitiva, significa que F(x + T) - F(x) es una constante, que se puede llamar A. Entonces la función G(x) = F(x) - Ax/T es periódica de período T. En efecto G(x + T) = F(x + T) - A(x + T)/T = F(x) + A - Ax/T - AT/T = F(x) - Ax/T = G(x). Por consiguiente F(x) = G(x) + Ax/T es la suma de G, periódica, y de Ax/T, lineal.



Y por último, una relación entre la integral de una función y la de su recíproca. Para simplificar, se impone f(0) = 0; *a* es un número cualquiera del dominio de f. Entonces tenemos la relación:

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = a \cdot f(a)$$



El área morada es la integral de f, el área amarilla es la de f^{-1}, y la suma es el rectángulo cuyos costados miden *a* y *f(a)* (valores algebraicos).

Se pasa de la primera curva, la de f, a la segunda, la de f^{-1} aplicando la simetría axial alrededor de la diagonal *y* = *x*.

El interés de esta fórmula es permitir el cálculo de la integral de f^{-1} sin conocer una primitiva; de hecho, ni hace falta conocer la expresión de la recíproca.

2.3 Cálculo de integrales indefinidas.

INTEGRALES INDEFINIDAS

6. $\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = sen\,x + C$

8. $\int tg\,x\,dx = -\int \frac{-\,sen\,x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

9. $\int cotg\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{sen\,x} = \ln|sen\,x| + C$

$$10.\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = tg\,x + C$$

$$11.\int \frac{1}{sen^2 x}\,dx = \int cosec^2 x\,dx = -\ cotg\,x + C$$

$$12.\int \sec x \cdot tg\,x\,dx = \sec x + C$$

$$13.\int cosec\,x \cdot cotg\,x\,dx = -\,cosec\,x + C$$

$$14.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sen\ x + C = -\ arc\cos x + C$$

$$15.\int \frac{dx}{1+x^2}\,arc\ tg\,x + C = -\ arc\ cotg\,x + C$$

$$16.\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc\sec x + C = -\ arc\ cosec\,x + C$$

$$17.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$18.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$19.\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$20.\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Ejemplo:

$$\int (4x^2 + 3)^{-6}\, dx$$

u = $4x^2 + 3$

du= $8x\, dx$

ya que nos hace falta el 8 para completar el diferencial, lo agregamos a dx, junto con un 1/8 para que así la integral de 1.

$$\frac{1}{8} \int (4x^2 + 3)^{-6}\, 8x\, dx$$

Se aplica la formula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

Y queda:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-5}}{5}\right) = \left(-\frac{1}{40\,(4x^2 +^5}\right)$$

2.3.1 Directas.

Ejemplo:

$$\int sex\ 5x \tan 5x\ dx$$

u=5x

du= 5

v= 5x

dv = 5

Al diferencial solo le falta agregarle el $\frac{1}{5}$ y el 5 en el dx para que así la integral de 1.

Y queda:

$$\frac{1}{5}\int \sec 5x \tan 5x\ 5\ dx$$

Por lo tanto:

$$= \frac{1}{5}\int \sec x \tan x\ du = \frac{1}{5}\sec u + c$$

$$= \frac{1}{5}\sec 5x + c$$

2.3.2 Con cambio de variable.

El método de integración por sustitución o cambio de variable se basa en la regla de la cadena.

$$\int f'(u) \cdot u'\,dx = F(u) + C$$

El método se basa en identificar una parte de lo que se va a integrar con una nueva variable t, de modo que se obtenga una integral más sencilla.
Pasos para integrar por sustitución

$$\int f'(u) \cdot u'\,dx$$

1º Se hace el cambio de variable y se diferencia en los dos términos:

$t = u$

$dt = u' \, dx$

Se despeja u y dx, sutituyendo en la integral:

$$\int f'(t) \cdot u' \, \frac{dt}{u'} = \int f'(t) \, dt$$

2º Si la integral resultante es más sencilla, procedemos a integrar:

$$\int f'(t) \, dt = f(t) + C$$

3º Se vuelve a la variable inical:

$$f(t) + C = f(u) + C$$

Ejemplo:

$$\int x\sqrt{1+x} \, dx$$

$1 + x = t^2$ $\qquad\qquad$ $x = t^2 - 1$

$dx = 2t \, dt$

$$\int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t \, dt = \int (2t^4 - 2t^2) \, dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + C$$

$t = \sqrt{1+x}$

$$\frac{2}{5}\left(\sqrt{1+x}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 + C =$$

$$= \frac{2}{5}(1+x)^2 \sqrt{1+x} - \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + C$$

2.3.3 Trigonométricas.

Potencias pares de sen x o cos x

Se aplica el seno y coseno del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^2 x\, dx$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \left(\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} sen\, 4x + C$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} sen\ 2x + \frac{1}{32} sen\ 4x + C$$

Potencias impares de sen x o cos x

Se relacionan el seno y el coseno mediante la fórmula:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x\ \operatorname{sen} x\, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$\int \left(\operatorname{sen} x - \cos^2 x\ \operatorname{sen} x\right) dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \mathrm{C}$$

$$\int \cos^3 x\, dx$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x\ \cos x\, dx = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x\, dx =$$

$$\int \left(\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x\right) dx = \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx =$$

$$\int \cos x\, dx - \frac{1}{3}\int 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \mathrm{C}$$

$$\int \cos^5 x\ dx$$

$$\int \cos^5 x\ dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int \left(1 - sen^2 x\right)^2 \cos x\, dx =$$

$$= \int \cos x\, dx - 2\int sen^2 x \cos x\, dx + \int sen^4 x \cos x\, dx =$$

$$= sen\, x - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5 x + C$$

Con exponente par e impar

El exponente impar se transforma en uno par y otro impar.

$$\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$$

$$\int sen^5 x \cos^2 x\, dx = \int sen\, x\; sen^4 x \cos^2 x\, dx =$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 sen\, x \cos^2 x\, dx =$$

$$= \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) sen\, x \cos^2 x dx$$

$$= \left(\int \cos^2 x\; sen\, x - 2\cos^4 x\; sen\, x + \cos^6 x\; sen\, x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

También se puede hacer por el cambio de variable t = sen x o t = cos x

$$\int \text{sen}^4 x \cos x dx$$

$\text{sen}\, x = t$

$$\cos x\,dx = dt \qquad dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx = \int t^4 \cos x \frac{dt}{\cos x} = = \int t^4\, dt = t^5 + C = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x\,dx$$

$\cos x = t$

$$-\operatorname{sen} x\,dx = dt \qquad dx = -\frac{dt}{\operatorname{sen} x}$$

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\int t^2 \operatorname{sen}^3 x \frac{dt}{\operatorname{sen} x} = -\int t^2 \operatorname{sen}^2 x\, dt =$$

$$= -\int t^2 \left(1\text{-}\cos^2 x\right) dt == -\int t^2 \left(1\text{-}t^2\right) dt = -\int \left(t^2 - t^4\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$$

$$-\operatorname{sen} x\,dx = dt \qquad dx = -\frac{dt}{\operatorname{sen} x}$$

$$-\int \frac{\operatorname{sen} x\left(1-t^2\right)}{t}\,\frac{dt}{\operatorname{sen} x} = -\int \frac{1-t^2}{t}\,dt = -\int \frac{dt}{t} + \int t\,dt =$$

$$-\ln t + \frac{1}{2}t^2 + C = -\ln\left(\cos x\right) + \frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

Productos de tipo sen(nx) · cos(mx)

Se transforman los productos en sumas:

$$sen\,A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[sen\left(A+B\right) + sen\left(A-B\right)\right]$$

$$\cos A \cdot sen\,B = \frac{1}{2}\left[sen\left(A+B\right) - sen\left(A-B\right)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B\right) + \cos\left(A-B\right)\right]$$

$$sen\,A \cdot sen\,B = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B\right) - \cos\left(A-B\right)\right]$$

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x\right) dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right) + C$$

$$\int \cos 5x \operatorname{sen} 3x \, dx$$

$$\int \cos 5x \;\; sen 3x \, dx = \frac{1}{2}\int \left(sen\, 8x - sen\, 2x\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x \; + \; C$$

2.3.4 Por partes.

El método de integración por partes permite calcular la integral de un producto de dos funciones aplicando la fórmula:

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Las funciones logarítmicas, "arcos" y polinómicas se eligen como u.

Las funciones exponenciales y trígonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como v'.

Ejemplos

$$\int x \cos x \, dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{sen} x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Si al integrar por partes tenemos un polinomio de grado n, lo tomamos como u y se repite el proceso n veces.

$$\int x^3 e^x dx$$

$$u = x^3 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3x^2$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

$$u = x^2 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 2x$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(x e^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C$$

Si tenemos una integral con sólo un logaritmo o un "arco", integramos por partes tomando: v' = 1.

$$\int \text{arc cotg}\, x\, dx$$

$$u = \text{arc cotg}\, x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \text{arc cotg}\, x\, dx = x\, \text{arc cotg}\, x + \int \frac{x}{1 + x^2} dx =$$

$$= x\, \text{arc cotg}\, x + \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$$

Si al integrar por partes aparece en el segundo miembro la integral que hay que calcular, se resuelve como una ecuación.

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \operatorname{sen} 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x} \cos 2x \, dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \cos 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx\right)$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx + \frac{9}{4}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x\right) + C$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{13} e^{3x} \left(-2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x\right) + C$$

2.3.5 Por sustitución trigonométrica.

A menudo es posible hallar la antiderivada de una función cuando el integrando presenta expresiones de la forma:

$\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, ó bien $\sqrt{u^2 - a^2}$; donde $a > 0$ y u es una función de x.

Se elimina el radical haciendo la sustitución trigonométrica pertinente; el resultado es un integrando que contiene funciones trigonométricas cuya integración nos es familiar. En la siguiente tabla se muestra cuál debe ser la sustitución:

Ejemplo:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

En este ejercicio la expresión dentro del radical es de la forma $a^2 - u^2$; por lo que la sustitución debe ser:

$$x = 2\,\text{sen}\,\theta, \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

De tal manera que:

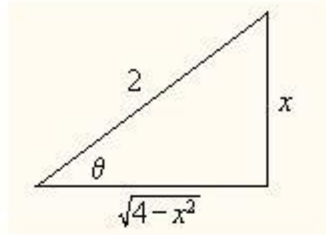
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\,\text{sen}\,\theta)^2\sqrt{4-(2\,\text{sen}\,\theta)^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4\,\text{sen}^2\,\theta\sqrt{4-4\,\text{sen}^2\,\theta}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{2\,\text{en}^2\,\theta\sqrt{4(1-\text{sen}^2\,\theta)}},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{2\,\text{sen}^2\,\theta\cdot 2\sqrt{\cos^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{4\,\text{sen}^2\,\theta\cdot\cos\theta} = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta + c \qquad (1)$$

Como $x = 2\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$$

Con estos datos, construimos el triángulo rectángulo que se observa en la figura de la derecha.



De la figura, se deduce que:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Sustituyendo estos valores en (1), se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c.$$

2.3.6 Por fracciones parciales.

A cada factor lineal, ax+b, del denominador de una fraccion racional propia (que el denominador se puede descomponer), le corresponde una fracción de la

forma , siendo A una constante a determinar.

Ejemplo:

luego nos queda la siguiente igualdad

o tambien lo podemos escribir $1 = (A + B)x + 2A - 2B$

Haciendo un Sistema.

$A + B = 0$

$2A - 2B = 1$, las soluciones son :

Quedando de esta manera:

con lo cual

CASO 2: Factores Lineales Iguales.

A cada factor lineal, ax+b,que figure n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

EJEMPLO:

Calculemos la siguente integral

Pero: Tendremos

Amplificando por

Las Soluciones son:

Nos queda:

CASO 3: Factores Cuadráticos Distintos.

A cada factor cuadrático reducible, que figure en el denominador de

una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma
siendo A y B constantes a determinar.

Ejemplo:

Calcular:

Con lo que se obtiene

de donde

luego los valores a encontrar son.

$A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$

CASO 4: Factores cuadráticos Iguales

A cada factor cuadrático irreducible, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

siendo los valores de A y B constantes reales.

Ejemplo:

Calcular la siguente integral

tendremos que por tanto multiplicando a ambos lados de la igualdad por el minimo común denominador tenemos

Donde los valores de las constantes son

$$A = 0 \ , \ B = 2 \ , \ C = 0 \ , \ D = 1$$

De donde remplazando e integrando a primitivas se obtiene.